SUMMA CUM LAUDE

트튼한 개념! 흔들리지 않는 실력!

숨마쿰라우데®

[수학 기본서]

S

확률과 통계

상위권 선호도 1위 브랜드

최강의 수학 기본서! – 숨마쿰라우데

2019 새교육과정

이보다 더 상세할 수 없다! 쉽고 상세한 개념 설명

기초–기본–발전–심화 학습을 위한 체계적인 문제 구성

사고력을 넓히는 심화 연계 학습

SUMMA CUM LAUDE

숨마쿰라우데®

[수학 기본서]

확률과 통계

이룸이앤비
Education&Books

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

INTRODUCTION

[이 책을 펴내면서]

「숨마쿰라우데 확률과 통계」를 소개합니다.
'확률과 통계' 는 실생활에서 매우 유용하게 쓰이는 수학의 중요한 분야 중 하나입니다.
하지만 한편으로는 많은 학생들이 힘들어하는 영역이기도 하지요.
"학생들이 어떻게 하면 확률과 통계를 보다 쉽게 이해할 수 있을까?"
우리 저자들은 이를 두고 오랜 시간 고민하였습니다.

「숨마쿰라우데 확률과 통계」는 한 편의 재미있는 이야기와 같습니다.
경우의 수 단원에서 다양한 방법으로 경우의 수를 구하는 것을 배우고 나면
이를 통해 확률을 쉽게 이해할 수 있고 통계 단원까지 그 내용이 자연스럽게 이어집니다.
마치 우리가 소설을 읽을 때 주인공이 어떤 어려움에 처했고
그 상황을 어떻게 헤쳐 나갔는지를 파악하며 읽어나가는 것과 마찬가지로
우리가 지금 어떤 문제를 풀어야 하는지,
그 문제를 어떻게 풀 수 있는지, 이러한 방법을 어떤 상황에 적용해볼 수 있을지 등을
쉽게 이해하고 따라갈 수 있도록 하였습니다.
아울러 **Advanced Lecture**와 **MATH** *for* **ESSAY**를 통해서는
대학별 고사 및 구술 면접 등에서의 보다 심화된 내용에도 대비할 수 있도록 하였습니다.

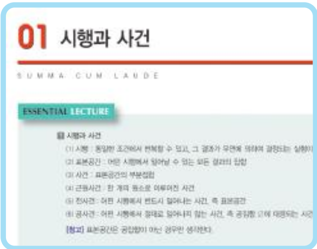
「숨마쿰라우데 수학 시리즈」는 오랜 시간 많은 사랑을 받아왔습니다.
이는 다른 수학 참고서와 비교할 수 없을 정도로 상세하고 친절한 설명과
다양한 수준의 학생들이 모두 만족할 수 있는 내용 덕분이라고 감히 생각합니다.
여러분도 이 책을 통해 '확률과 통계' 에 재미를 느끼고
꾸준한 연습을 통해 흔들리지 않는 실력을 쌓을 수 있기를 간절히 기원합니다!

–저자 일동–

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

STRUCTURE

[이 책의 구성과 특징]



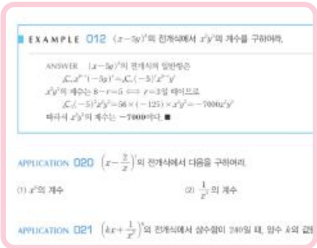
01 시행과 사건

SUMMA CUM LAUDE

ESSENTIAL LECTURE

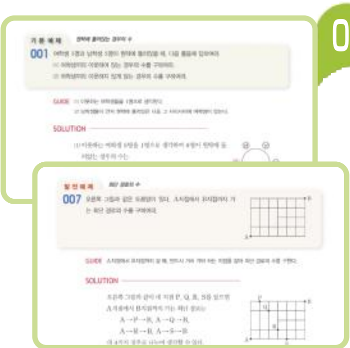
01 개념 학습

수학 학습의 기본은 개념에 대한 완벽한 이해입니다. 단원을 개념의 기본이 되는 소단원으로 분류하여, 기본 개념을 확실하게 이해할 수 있도록 설명하였습니다. 〈공식의 정리〉와 함께 〈공식이 만들어진 원리〉, 학습 선배인 〈필자들의 팁〉, 문제 풀이시 〈범하기 쉬운 오류〉 등을 설명하여 확실한 개념 정립이 가능하도록 하였습니다.



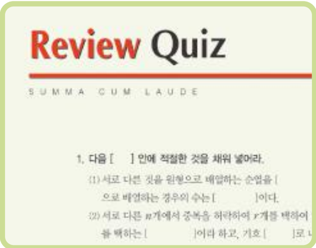
02 EXAMPLE & APPLICATION

소단원에서 공부한 개념을 적용할 수 있도록 가장 적절한 〈EXAMPLE〉을 제시하였습니다. 다양한 접근 방법이나 추가 설명을 통해 개념을 확실하게 이해하고 넘어가도록 하였습니다. EXAMPLE에서 익힌 방법을 적용하거나 응용해 봄으로써 개념을 탄탄하게 다질 수 있도록 APPLICATION을 제시하였습니다.



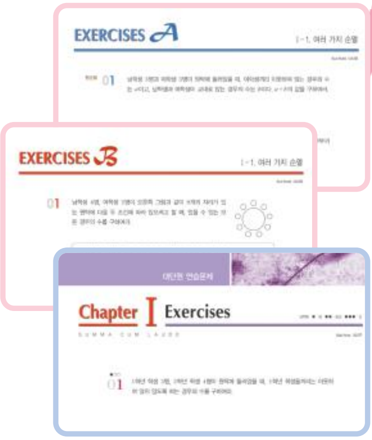
03 기본예제 & 발전예제

탄탄한 개념이 정리된 상태에서 본격적인 수학 단원별 유형을 익힐 수 있습니다. 대표적인 유형 문제를 〈기본예제〉와 〈발전예제〉로 구분해 풀이 GUIDE와 함께 그 해법을 보여 주고, 같은 유형의 〈유제〉 문제를 제시하여 해당 유형을 완벽하게 연습할 수 있습니다. 또, 〈Summa's Advice〉에 보충설명을 제시하여 실수하기 쉬운 사항, 중요한 추가적인 설명을 덧붙여 해당 문항 유형에 철저하게 대비할 수 있도록 하였습니다.



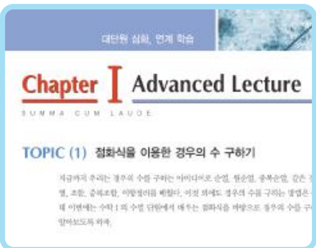
04 중단원별 Review Quiz

소단원으로 나누어 공부했던 중요한 개념들을 중단원별로 모아 괄호 넣기 문제, 참 · 거짓 문제, 간단한 설명 문제 등을 제시하였습니다. 이는 중단원별로 중요한 개념을 다시 한번 정리하여 전체를 보는 안목을 유지할 수 있도록 해 줍니다.



05 중단원별, 대단원별 EXERCISES

이미 학습한 개념과 유형문제들을 중단원과 대단원별로 테스트하도록 하였습니다. 〈난이도별〉로 A, B단계로 문항을 배치하였으며, 내신은 물론 수능 시험 등에서 출제가 가능한 문제들로 구성하여 정확한 자신의 실력을 측정할 수 있습니다. EXERCISES를 통해 부족한 부분을 스스로 체크하여 개념 학습으로 피드백하면 핵심 개념을 보다 완벽히 정리할 수 있습니다.



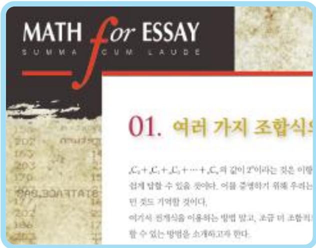
06 Advanced Lecture(심화, 연계 학습)

본문보다 더욱 심화된 내용과 앞으로 학습할 상위 단계와 연계된 내용을 제시하고 있습니다. 특히, 학생들이 충분히 이해할 수 있는 수준으로 설명하여 깊이 있는 학습으로 수학 실력이 보다 향상될 수 있도록 하였습니다.

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

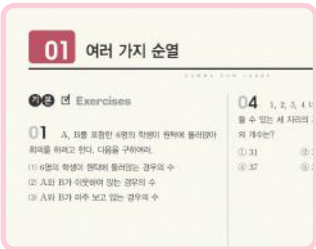
STRUCTURE

[이 책의 구성과 특징]


MATH for ESSAY
SUMMA CUM LAUDE
01. 여러 가지 조합식

07 MATH for ESSAY

고2 수준에서 연계하여 공부할 수 있는 수리 논술, 구술에 관련된 학습 사항을 제시하였습니다. 앞의 심화, 연계 학습과 더불어 좀 더 수준 있는 수학을 접하고자 하는 학생들을 위해 깊이 있는 수학 원리 학습은 물론 앞으로 입시에서 강조되는 <수리 논술, 구술>에도 대비할 수 있도록 하였습니다.


01 여러 가지 순열
Exercises

08 내신 · 모의고사 대비 TEST

수학 공부에서 많은 문제를 접하여 적응력을 키우는 것은 원리를 이해하는 것과 함께 중요한 수학 공부법 중 하나입니다. 이를 위해 별도로 단원별 우수 문제를 <내신 · 모의고사 대비 TEST>를 통해 추가로 제공하고 있습니다. 단원별로 자신의 실력을 측정하거나, 중간 · 기말 시험 및 각종 모의고사에 대비하여 실전 감각을 기를 수 있습니다.


경우의 수
1. 여러 가지 순열
APPLICATION

09 SUB NOTE – 정답 및 해설

각 문제에 대한 좋은 해설은 문제풀이 만큼 실력 향상을 위해 필요한 요소입니다. 해당 문제에 대해 가장 적절하고 쉬운 풀이 방법을 제시하였으며, 알아두면 도움이 되는 추가적인 풀이 방법 역시 제시하여 자학자습을 위한 교재로 손색이 없도록 하였습니다.

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

CONTENTS

[이 책의 차례]

SUMMA CUM LAUDE-MATHEMATICS

CONTENTS

숨마쿰라우데® [확률과 통계]

CHAPTER Ⅱ. 확률

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

CONTENTS

[이 책의 차례]

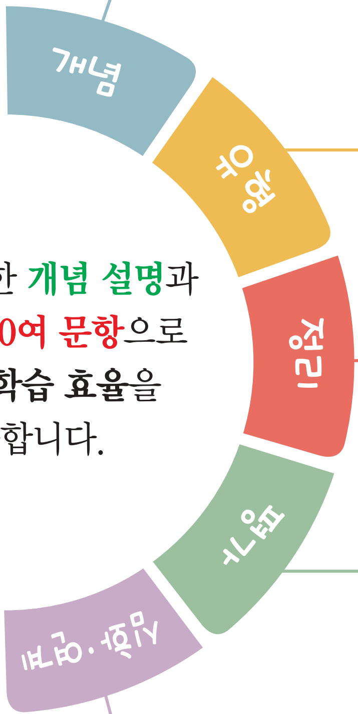
CHAPTER Ⅲ. 통계

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

STUDY SYSTEM

[수학 학습 시스템]

쉽고 상세한 **개념 설명**과
엄선된 **750여 문항**으로
최고의 학습 효율을
제공합니다.



단원 개념 학습 단계

EXAMPLE
APPLICATION

필수 유형 학습 단계

기본, 발전예제
유제

단원 학습 정리 단계

중단원별 Review Quiz
중단원별 EXERCISES
대단원별 Exercises

최종 실력 테스트 단계

내신 · 모의고사 대비 TEST

심화, 연계 학습 단계

Advanced Lecture
MATH for ESSAY

THINK MORE ABOUT YOUR FUTURE

수학 공부법 특강

상위 1%가 되기 위한 효율적 학습법

www.erumenb.com

「확률과 통계」의 내용은 실생활에 매우 근접해 있어 문제의 활용 폭이 무궁무진하게 넓다. 다르게 말하자면, 아무리 많은 문제 유형을 암기한다고 해도 실전에서는 얼마든지 또 새로운 유형의 문제가 출제될 수 있다는 것을 뜻한다.

그러나 「확률과 통계」가 그렇게까지 답이 없는 것은 아니다. 핵심내용 및 원리를 파악하여 기본 개념을 익히고 문제를 많이 풀다 보면 자연스럽게 여러 가지 패턴이 눈에 들어오게 될 것이다. 그 패턴을 명확하게 분류할 수 없기 때문에 「확률과 통계」를 많은 학생들이 어려워하는 것이지만, 많은 문제를 풀어 패턴이 어느 정도 눈에 들어오면 「확률과 통계」가 어렵다고 느끼지는 않을 것이다.

「확률과 통계」를 공부할 때, "이 단원을 완성했다, 나는 모든 것을 이해하고 완벽하게 알고 있다"라는 자만심은 반드시 경계해야 하며, 지속적으로 다양하고 많은 문제를 접해 보고, 풀어 보면서 수학에 '정진' 한다는 마음가짐으로 공부하는 것을 추천한다.

■ 『확률과 통계』 원리 잡기

「확률과 통계」는 경우의 수, 확률, 통계의 3개의 단원으로 구성되어 있다.

첫 단원인 경우의 수는 고1 때 배웠던 순열과 조합의 확장이다.

경우의 수를 바탕으로 전체에 대한 특정한 사건의 비율을 큰 틀로 생각하는 확률 단원은 중학교 때부터 공부해 온 내용으로 처음에 접근하기에 매우 친숙할 것이다. 고등학교 과정에서는 집합과 연계하여 사건을 이해하고, 이를 바탕으로 다양한 확률을 생각해 볼 것이다.

확률에 비해 통계 단원은 고등학교 과정에서 본격적으로 다뤄지다 보니 생소한 개념이 많이 나온다. 그러므로 일단 통계에 관련된 핵심 용어에 대한 정확한 이해가 필수이다.
통계는 수능이나 내신 시험에서 그다지 어렵게 출제되지 않음에도 불구하고 개념을 소홀히 하여 문제를 틀리는 경우가 많다. 따라서 핵심 개념을 반드시 자신의 것으로 만들도록 하자.
핵심 개념을 공부할 때에는 우선 중단원이 몇 개의 소단원으로 나누어져 있는지 확인하고, 어떤 차이로 구분되어 있는지 파악한 다음 각각 흐름에 따라 개념과 용어를 정리해 보는 것이 좋다. 다음 예와 같이 기본 틀을 만들고 여기에 살을 붙여가면서 정리하면 된다.

1. 확률분포	이산확률변수의 확률분포	➡	이항분포	➡	연속확률변수의 확률분포	➡	정규분포
	이산확률변수와 확률질량함수의 뜻		이항분포의 뜻		연속확률변수와 확률밀도함수의 뜻		정규분포, 표준 정규분포의 뜻
2. 통계적 추정	모집단과 표본	➡	모평균의 추정				
	모평균과 표본평균		모평균의 신뢰구간				

어떤 과목이든지 공부를 함에 있어서 중요한 것은 많은 양의 문제를 풀기보다

얼마나 깊이 생각해 보았는가?

에 있다. 문제를 맞닥트릴 때마다 치열하게 고민해 보자. 문제에 대해 치열하게 고민하는 것은 마치 새끼 동물이 딱딱한 알 껍질을 깨고 부화할 때 겪는 고통과 비슷하다.
문제에 대해 치열하게 고민할 때 비로소 독자가 생각할 수 있는 범위의 한계에 도달하게 되고 그 벽(딱딱한 알 껍질)을 깰 때 사고력이 조금씩 늘어날 것이다. 이 어려운 과정을 통해야 뇌의 구조가 변하고 사고의 폭이 넓어진다. 지금 당장은 어려워 보여도 단계적으로 차근차근 공부해 나간다면 어려움은 사라지고 어느새 자신의 것이 되어 있을 것이다.

한편 현실적으로 얼마나 오랜 시간 고민해야 하는가는 독자가 처한 상황에 따라 다를 것이다. 지금 당장 시험을 앞 둔 상황이라면 너무 오래 고민하는 것은 비효율적이다. 그러나 처음 시작하는 학생이라면 충분히 고민하여야 한다. 평소에 잘 풀리지 않는 문제는 자기 전에 혹은 지하철이나 버스 안에서도 고민해 보자. 우리의 뇌는 항상 깨어 있으니까.

공부를 하다 보면 스스로의 학습 방법을 찾는 것이 무엇보다 중요하다. 주변에서 볼 수 있는 선배들의 학습 노하우를 제시해 놓았으니 참고하여 자신만의 것을 만들어내도록 하자.

1 공식의 유도 과정을 기억하라.

수학 공부를 하면서 암기가 필요한 상황이 있다면 바로 수학 공식을 외울 때이다. 공식을 외우지 않는다면 문제에 공식을 적용하기가 어렵고, 또한 공식을 활용하는 데 있어 자신감이 떨어질 수밖에 없기 때문이다.

한편으로 공식을 외우는 것만큼 중요한 것이 공식의 유도 과정을 기억하는 것이다.

그 이유는 작게는 여러 가지 수학 서술형, 수리 논술에서 그 유도 과정을 묻는 문제가 출제되기 때문이고, 더 나아가서는 공식의 유도 과정이 해당 단원의 핵심적인 내용이며, 단원에 대한 이해의 가장 기본적인 바탕이 되기 때문이다. 또한 어려운 문제일수록 단순히 공식을 적용하는 것을 묻는 것이 아니라, 공식을 유도하는 과정을 조금 변형하여 활용해야만 풀 수 있도록 되어 있기 때문이다.

「확률과 통계」에서도 경우의 수부터 통계까지 많은 공식들이 있다. 기본적인 문제들은 이 공식들의 단순 암기만으로도 풀 수 있는 경우가 많다. 그러나 「확률과 통계」의 학문적 특성상 문제가 조금만 어려워져도 단순 암기로는 풀기 힘들며, 문제를 풀기 위해 여러 가지 다양한 방법을 생각해내야 한다. 필자는 이러한 방법을 생각해내기 위해서 공식의 유도 과정을 차근차근 익혀 두어 기본을 튼튼하게 해두는 것을 추천한다. 자신도 모르는 사이에 「확률과 통계」의 내용 자체에 매우 익숙해져 있는 것을 발견하게 될 수 있을 것이다.

2 문제로 다양한 패턴을 익혀라.

수학에서 기본 개념도 중요하지만, 궁극적으로는 문제 해결 능력을 길러야 한다.

기본 개념을 이해하는 것이 모든 것의 출발점이긴 하지만, 다양한 문제를 접해보지 않고는 기본 개념을 완벽하게 이해했다고 할 수 없으며, 또한 처음 접해 보는 다양한 문제에 대해 기본 개념을 바로 적용해 보는 것은 쉽지 않다.

따라서 기본 개념을 숙지한 다음에는 두려워하지 말고 많은 문제에 부딪혀 보면서

다양한 패턴을 익혀 실제 문제 해결 능력을 키우는 것

이 중요하겠다.

3 해설집을 100% 활용하라.

수학 공부를 하면서 문제를 풀어 보기도 전에 해설을 먼저 보는 것은 금물이다. 다만, 문제를 충분히 고민한 뒤에도 풀리지 않는 경우 해설을 100% 활용하는 것은 문제 풀이 능력의 향상에 큰 도움이 된다. 해설을 100% 활용하는 방법은 다음과 같다.

❶ 해설과 같은 방법을 생각해내야 하는 이유를 스스로에게 되묻자.

하늘에서 뚝 떨어진 것과 같은 해설을 보고 놀라는 것은 도움이 되지 않는다. 그 순간 문제의 답을 알았다는 것밖에 의미가 없다. 해설과 같은 방법을 생각하지 못했다고 자괴감에 빠지라는 의미가 아니다. 해설에서 생각한 방법이 신기하다면 해설을 100% 이해한 것이 아니다. 해설을 보면서 해설에서 제안한 방법이 스스로에게 납득될만큼 충분히 고민하고, 스스로에게 이런 풀이 방법을 생각해내야 하는 이유를 되물어라. 해설에서 제안한 방법을 비슷한 상황에서 생각해낼 수 있을 때까지!

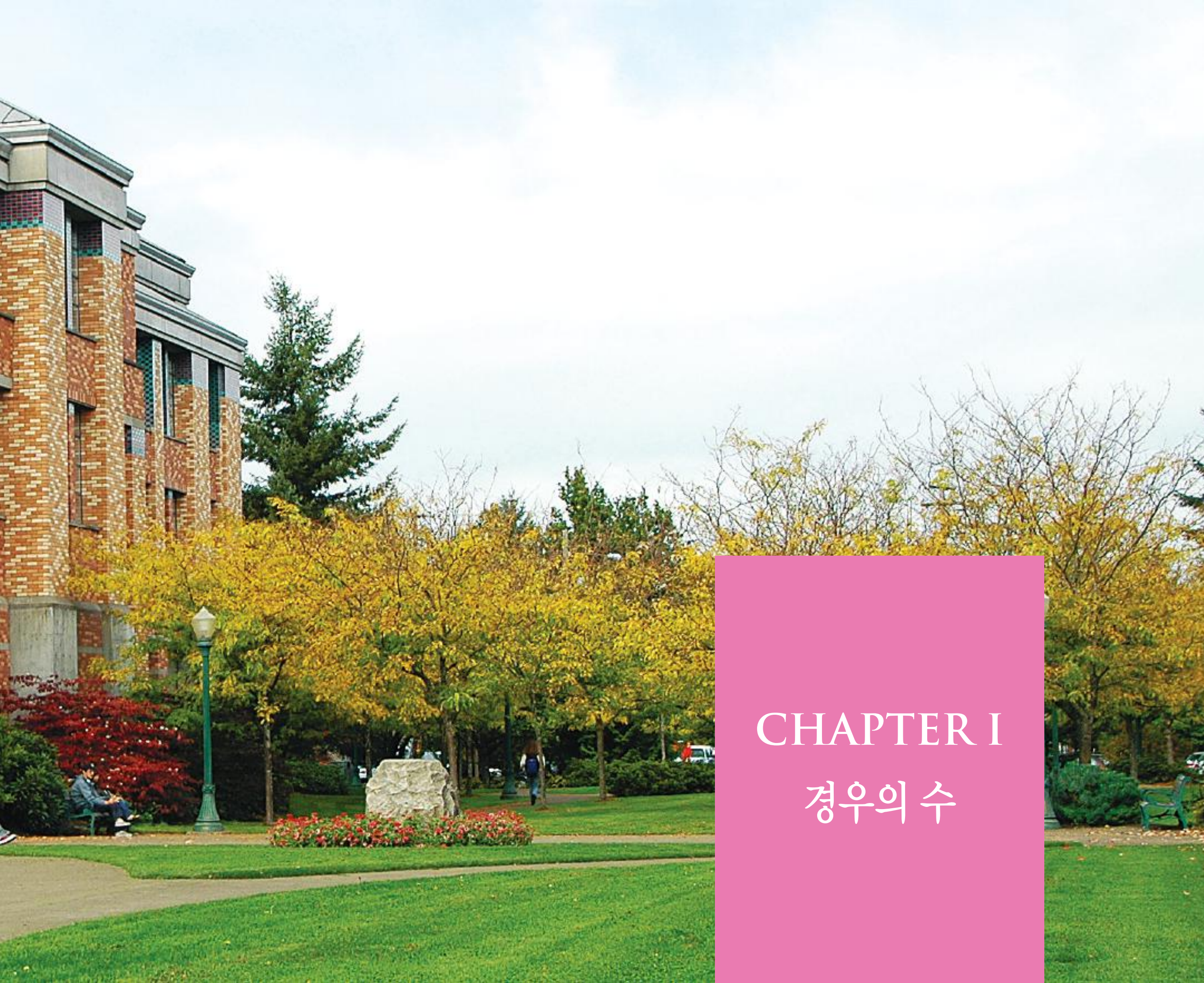
❷ 해설을 보았다면 반드시 다시 풀어 보도록 하자.

해설만 확인하고 "아 그렇구나."하며 곧바로 다음 문제 해설로 넘어간다면 당연히 다음에 비슷한 문제가 나왔을 때, 해설에서 제안한 방법이 생각나지 않을 것이다. 해설을 확인한 후에는 꼭 답안지를 덮고 스스로 다시 한번 풀어 보아야 한다. 다시 풀기를 해야만 온전히 내가 해결한 문제가 된다. 다시 풀기를 여러 번 할수록 어느 순간부터 해설을 보지 않더라도 문제를 풀 때 머릿속에서 해법이 떠오르게 될 것이다.

4 오답노트를 작성하라.

오답노트는 수학을 공부하는 데 있어서 일종의 수련과 같다. 자신이 틀렸던 문제를 완벽하게 수련하여 다음에 비슷한 문제가 나왔을 때, 틀리지 말자는 것이다.
오답노트는 스스로 다시 풀어 본다는 마음가짐을 가지고 작성하는 것이다.
따라서 오답노트 자체를 위해 예쁘게 정성들여 꾸며가면서 해설을 단지 옮겨 적는 것은 의미가 없다. 오로지 자신만의 언어로 문제를 풀어나가는 과정을 적도록 해보자.
또한 이 문제를 통해 까먹고 있었던 공식, 혹은 이 문제를 통해 알게 된 새로운 아이디어 등을 중점적으로 메모해 놓는 것이 좋다. 단순히 머릿속으로 '아 이런 공식이 있었지.' 혹은 '오 참신한 풀이 방법이네!' 하는 것은 여전히 공식은 까먹고, 아이디어는 매번 새롭게 느껴지는 지름길이다.
수학을 수련한다는 마음으로 한 번씩 오답노트를 정리해 보자.

숨마쿰라우데 수학 기본서로 제대로 된 공부를 하여 수학에 대한 자신감을 가지기 바란다.



CHAPTER I
경우의 수

1. 여러 가지 순열
2. 중복조합과 이항정리

숨마쿰라우데®

[확률과 통계]

경우의 수

SUMMA CUM LAUDE

디저트 카페를 가보면 쿠키들을 다양한 모양으로 진열해 둔다. 쿠키들을 원형이나 사각형 모양으로 진열하는 것은 일렬로 진열하는 것과 어떤 차이가 있을까? 이 단원을 통해 그 차이를 알아보자.

본 단원의 구성에 대하여...

Ⅰ. 경우의 수	1. 여러 가지 순열	01 원순열 02 중복순열 03 같은 것이 있는 순열 ● Review Quiz ● EXERCISES
	2. 중복조합과 이항정리	01 중복조합 02 이항정리 ● Review Quiz ● EXERCISES
	● **대단원 연습문제** ● **대단원 심화, 연계 학습** TOPIC (1) 점화식을 이용한 경우의 수 구하기 ● **논술, 구술 자료** 01. 여러 가지 조합식의 직관적 이해	

일상생활과 가장 가까운 수학 '경우의 수'

"우리나라가 16강에 진출할 경우의 수는?" 이는 월드컵 기간에 뉴스를 보면 꼭 나오는 말이다. 뉴스에서는 사람들에게 이 질문에 대한 답을 알려주기 위해 여러 가지 정보를 분석한 내용을 보도하고, 또 이 질문에 관심이 있는 많은 스포츠 팬들도 자기 나름의 생각을 논리적으로 펼쳐서 주변 사람들과 토의하곤 한다. 지금 이 책을 보고 있는 여러분도 당연히 경우의 수를 끊임없이 생각하고 있을 것이다. '오늘은 무슨 무슨 과목을 공부할까?', '내일 학교에 갈 때에는 어떤 길을 택해서 갈까?', '대학 원서는 어디 어디에 넣을까?' 등등 수없이 많다. 당장 수없이 많은 수학 문제를 풀어 봐도 알겠지만 실제 현실의 상황을 응용해서 만든 수학 문제는 거의 대부분이 경우의 수와 관련되어 있다.

01 원순열

ESSENTIAL LECTURE

1 원순열

(1) 서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라 한다.

(2) 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$\frac{{}_nP_n}{n}=\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

이번 단원에서 배울 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열은 고등 수학(하)에서 배운 순열의 특수한 형태이다. 따라서 순열의 개념을 잘 숙지하는 것이 무엇보다도 중요하다.

서로 다른 n개에서 중복되지 않게 $r(0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을

n개에서 r개를 택하는 **순열**(Permutation)

이라 하고, 이 순열의 수를 기호로 ${}_n\mathbf{P}_r$와 같이 나타낸다.

순열의 수 ${}_nP_r$를 정리하면 다음과 같다.

① ${}_nP_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}}$ (단, $0<r\le n$)

② ${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1=n!$

③ $0!=1,\ {}_nP_0=1$

④ ${}_nP_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

6부터

$${}_6P_3=6\times5\times4$$

3개의 수

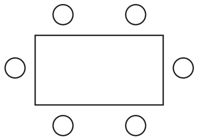
6부터 시작하여 하나씩 작아지는
3개의 수를 곱한다.

이제 순열을 바탕으로 원순열에 대해 알아보도록 하자.

1 원순열

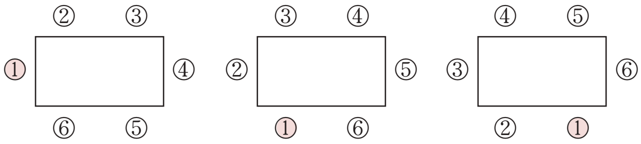
순열이 서로 다른 것들을 일렬로 나열하는 것이라면 **원순열**(circular permutation)은 말 그대로 서로 다른 것들을 원형으로 배열하는 것이다. 일렬로 나열하는 것과 원형으로 배열하는 것에는 어떤 차이가 있을까?

EXAMPLE 003 오른쪽 그림과 같은 직사각형 모양의 탁자에 6명이 둘러앉는 경우의 수를 구하여라.



ANSWER 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(6-1)!=5!=120$

원탁에서는 동일하던 것이 직사각형 모양의 탁자에서는 3가지씩 다른 것으로 나타난다.



따라서 구하는 경우의 수는 $120\times3=\mathbf{360}$ ■

[다른 풀이] 직사각형 모양의 탁자에서 기준이 되는 한 명이 앉을 수 있는 자리는 3가지이다.

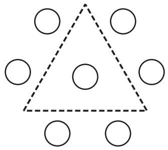
한 명이 앉고 나면 나머지 5개의 자리에 순서가 생기므로 남은 5명이 앉는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는 $3\times120=360$

Sub Note 002쪽

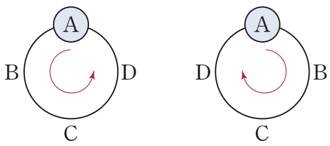
APPLICATION 003 오른쪽 그림과 같이 1개의 의자를 중심으로 6개의 의자가 정삼각형 모양으로 놓여 있다. 7명이 의자에 앉는 경우의 수를 구하여라. (단, 한가운데 의자에 앉은 학생이 보는 방향은 무시한다.)



수학 공부법에 대한 저자들의 충고 – 염주순열

서로 다른 n개를 원형으로 배열할 때, 염주나 목걸이처럼 뒤집어 볼 수도 있다면 배열하는 경우의 수는 어떻게 될까?

다음 그림에 나타난 것처럼 원형 배열의 순서는 다르나 서로 방향이 반대인(시계 방향과 시계 반대 방향) 두 경우를 같은 배열 상태로 볼 수 있게 된다.



따라서 배열하는 경우의 수는 원순열의 수에서 반으로 줄어들게 된다. 이와 같이 염주처럼 뒤집어 볼 수 있는 원순열을 **염주순열**이라 하고, 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 염주순열의 수는 $\frac{1}{2}(n-1)!$로 계산된다.

기 본 예 제 원탁에 둘러앉는 경우의 수

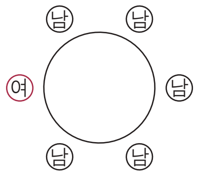
001 여학생 5명과 남학생 5명이 원탁에 둘러앉을 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 여학생끼리 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하여라.

(2) 여학생끼리 이웃하지 않게 앉는 경우의 수를 구하여라.

GUIDE (1) 이웃하는 여학생들을 1명으로 생각한다.
(2) 남학생들이 먼저 원탁에 둘러앉은 다음 그 사이사이에 여학생이 앉는다.

SOLUTION



(1) 이웃하는 여학생 5명을 1명으로 생각하여 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

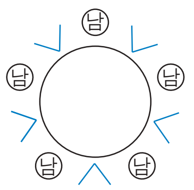
$(6-1)!=5!=120$

여학생끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times120=\mathbf{14400}$ ■



(2) 남학생 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

여학생 5명은 남학생들 사이사이의 5자리에 앉으면 되므로 이때의 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times120=\mathbf{2880}$ ■

유제
001-1 여학생 5명과 남학생 3명이 원탁에 둘러앉을 때, 다음 물음에 답하여라.
Sub Note 017쪽

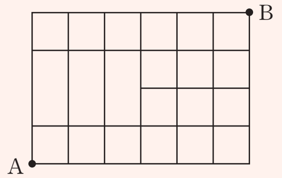
(1) 여학생끼리 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하여라.

(2) 남학생끼리 이웃하지 않게 앉는 경우의 수를 구하여라.

유제
001-2 어른 4명과 어린이 4명이 원탁에 둘러앉을 때, 어른과 어린이가 교대로 앉는 경우의 수를 구하여라.
Sub Note 017쪽

발전예제 최단 경로의 수

007 오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A지점에서 B지점까지 가는 최단 경로의 수를 구하여라.



GUIDE A지점에서 B지점까지 갈 때, 반드시 거쳐 가야 하는 지점을 잡아 최단 경로의 수를 구한다.

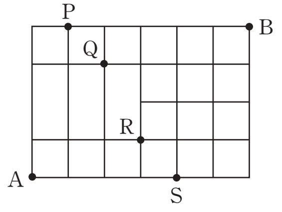
SOLUTION

오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A지점에서 B지점까지 가는 최단 경로는

$A \to P \to B$, $A \to Q \to B$,

$A \to R \to B$, $A \to S \to B$

의 4가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.



(i) $A \to P \to B$로 가는 최단 경로의 수 : $\dfrac{4!}{3!} \times 1 = 4$

(ii) $A \to Q \to B$로 가는 최단 경로의 수 : $\dfrac{4!}{2!2!} \times \dfrac{5!}{4!} = 30$

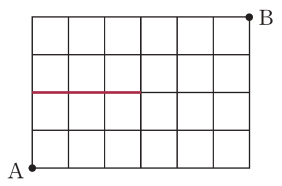
(iii) $A \to R \to B$로 가는 최단 경로의 수 : $\dfrac{4!}{3!} \times \dfrac{6!}{3!3!} = 80$

(iv) $A \to S \to B$로 가는 최단 경로의 수 : $1 \times \dfrac{6!}{2!4!} = 15$

(i)~(iv)에 의하여 구하는 최단 경로의 수는

$4+30+80+15=$ **129** ■

[다른 풀이 1] 문제에서 주어진 그림은 오른쪽 그림에서 붉은 선이 없는 그림과 같다.
따라서 구하는 최단 경로의 수는 오른쪽 그림에서 먼저 A지점에서 B지점까지 가는 모든 최단 경로의 수를 구한 다음 붉은 선을 지나는 최단 경로의 수를 구하여 빼면 된다.



[그림 1]

먼저 A지점에서 B지점까지 가는 모든 최단 경로의 수는

$$\frac{10!}{4!6!} = 210$$

1. 다음 [ ] 안에 적절한 것을 채워 넣어라.

(1) 서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 [ ]이라 하고, 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 경우의 수는 [ ]이다.

(2) 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 [ ]이라 하고, 기호 [ ]로 나타낸다.

(3) n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 [ ]이다. (단, $p+q+\cdots+r=n$)

(4) 실수 전체의 집합의 두 부분집합 X, Y에 대하여 $n(X)=a$, $n(Y)=b$일 때, 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 개수는 [ ]이다.

2. 다음 문장이 참(true) 또는 거짓(false)인지 결정하고, 그 이유를 설명하거나 적절한 반례를 제시하여라.

(1) 4명의 학생이 각각 축구부, 농구부, 배구부 중 1개의 동아리에 가입하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_3$이다.

(2) 중복순열의 수 ${}_n\Pi_r$에서 항상 $n \geq r$이어야 한다.

3. 다음 물음에 대한 답을 간단히 서술하여라.

(1) 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수가 $(n-1)!$임을 설명하여라.

(2) a, a, b, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수는 조합의 수 ${}_5C_2$와 같음을 설명하여라.

EXERCISES A

Sub Note 040쪽

원순열 **01**

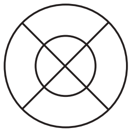
남학생 3명과 여학생 3명이 원탁에 둘러앉을 때, 여학생끼리 이웃하여 앉는 경우의 수는 a이고, 남학생과 여학생이 교대로 앉는 경우의 수는 b이다. $a+b$의 값을 구하여라.

원순열 **02** 서술형

네 쌍의 부부가 원탁에 둘러앉을 때, 부부끼리 이웃하여 앉는 경우의 수는 m, 부부끼리 마주 보고 앉는 경우의 수는 n이다. $m-n$의 값을 구하여라.

원순열 **03**

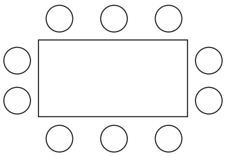
오른쪽 그림과 같은 원판의 8개의 각 영역을 서로 다른 8가지 색을 모두 사용하여 칠하는 경우의 수는?



① $8!$　② $\frac{8!}{2}$　③ $\frac{8!}{3}$　④ $\frac{8!}{4}$　⑤ $\frac{8!}{5}$

원순열 **04**

10명의 학생이 오른쪽 그림과 같은 직사각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는?

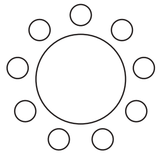


① $9!$　② $9!\times2$　③ $9!\times3$　④ $9!\times4$　⑤ $9!\times5$

중복순열 **05**

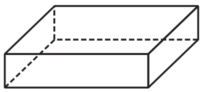
○, ×로 답하는 n개의 문제에 답하는 경우의 수가 256일 때, n의 값을 구하여라.

01 남학생 4명, 여학생 2명이 오른쪽 그림과 같이 9개의 자리가 있는 원탁에 다음 두 조건에 따라 앉으려고 할 때, 앉을 수 있는 모든 경우의 수를 구하여라.



(가) 남학생, 여학생 모두 각각 같은 성별끼리 2명씩 조를 만든다.
(나) 같은 조끼리는 서로 이웃하여 앉는다.
(다) 서로 다른 두 개의 조 사이에 반드시 한 자리를 비워둔다.

02 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 모두 다른 직육면체의 겉면을 서로 다른 6가지 색을 모두 사용하여 칠하는 경우의 수를 구하여라.



03 여섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5를 중복 사용하여 만들 수 있는 모든 자연수를 크기가 작은 수부터 차례로 나열할 때, 4000은 몇 번째 수인가?

① 860번째 ② 861번째 ③ 862번째
④ 863번째 ⑤ 864번째

Chapter I Exercises

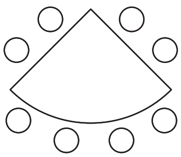
난이도 ■ : 중 ■■ : 중상 ■■■ : 상

SUMMA CUM LAUDE

Sub Note 052쪽

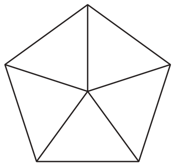
■□□
01 1학년 학생 3명, 2학년 학생 4명이 원탁에 둘러앉을 때, 1학년 학생들끼리는 이웃하여 앉지 않도록 하는 경우의 수를 구하여라.

■□□
02 오른쪽 그림과 같은 사분원 모양의 탁자에 8명의 학생이 둘러앉는 경우의 수는?



① $7!$ ② $3\times7!$ ③ $4\times7!$
④ $8!$ ⑤ $3\times8!$

■■□
03 오른쪽 그림과 같은 합동인 삼각형 5개로 이루어진 5개의 영역이 있다. 서로 다른 n가지 색 중에서 5가지를 골라 모두 사용하여 칠하는 경우의 수가 1344일 때, n의 값을 구하여라.



Chapter I Advanced Lecture

SUMMA CUM LAUDE

TOPIC (1) 점화식을 이용한 경우의 수 구하기

지금까지 우리는 경우의 수를 구하는 아이디어로 순열, 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열, 조합, 중복조합, 이항정리를 배웠다. 이것 외에도 경우의 수를 구하는 방법은 수없이 많은데 이번에는 수학 I 의 수열 단원에서 배우는 점화식을 바탕으로 경우의 수를 구하는 방법을 알아보도록 하자.

1 피보나치 수열의 점화식을 이용한 문제

피보나치 수열이란 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …과 같이 연속하는 앞의 두 항의 합이 그 다음 항이 되도록 나열한 수열을 말한다. 이 피보나치 수열의 점화식은 다음과 같이 나타내어진다.

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geq 3),\ a_1=1,\ a_2=2$$

이 점화식이 경우의 수 문제에서 어떻게 활용되는지 다음 문제를 살펴보면서 알아보자.

민수는 10개의 계단을 올라가려고 한다. 민수는 한 번에 계단을 1개 혹은 2개 올라갈 수 있다고 할 때, 민수가 10개의 계단을 오르는 경우의 수를 구하여라.

위 문제는 지금까지 배운 순열, 조합, 이항정리 등 그 어떤 것으로도 풀기가 매우 애매하다. 바로 이런 경우에 점화식의 개념을 적용시켜 볼 수 있다. 점화식의 개념을 적용시켜 보기 위해서는 문제를 다음과 같이 일반화시켜 보는 것이 좋다.

민수는 n개의 계단을 올라가려고 한다. 민수는 한 번에 계단을 1개 혹은 2개 올라갈 수 있다고 할 때, 민수가 n개의 계단을 오르는 경우의 수를 구하여라. (단, $n\geq 3$)

n개의 계단을 오르는 경우의 수는 마지막에 1개를 오르는 경우와 2개를 오르는 경우로 나누어 볼 수 있다.

01. 여러 가지 조합식의 직관적 이해

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$의 값이 2^n이라는 것은 이항정리 단원을 공부한 학생이라면 쉽게 답할 수 있을 것이다. 이를 증명하기 위해 우리는 $(x+1)^n$의 전개식을 이용하였던 것도 기억할 것이다.
여기서 전개식을 이용하는 방법 말고, 조금 더 조합적으로 이 이항계수의 성질을 설명할 수 있는 방법을 소개하고자 한다.

위 식을 조합적으로 설명하기 위해서 집합의 개념을 빌려와 보자.
'집합' 을 떠올리면 2^n이라는 수가 그리 낯설지 않을 것이다. 다름 아닌

원소가 n개인 집합의 부분집합의 개수가 2^n이다.

한편 ${}_nC_r$가 조합적으로 서로 다른 n개 중에서 r개를 뽑는 것을 의미함을 상기하여 이를 집합으로 생각해 보면, 서로 다른 n개의 원소를 갖는 집합 A의 부분집합 중 원소가 r개인 부분집합의 개수가 ${}_nC_r$임을 알 수 있다. 즉,

원소가 0개인 부분집합의 개수는 ${}_nC_0$ ⬅ $\varnothing$
원소가 1개인 부분집합의 개수는 ${}_nC_1$ ⬅ $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \cdots, \{n\}$
원소가 2개인 부분집합의 개수는 ${}_nC_2$ ⬅ $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \cdots, \{n-1, n\}$
⋮
원소가 n개인 부분집합의 개수는 ${}_nC_n$ ⬅ $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$

따라서 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$의 값은 집합 A의 모든 부분집합의 개수의 합이므로 2^n과 같다.

이번에는 다음 식을 조합의 수로 설명해 보겠다. (이 식은 69쪽 **발전예제 014**에서 이항계수의 성질을 이용하여 증명했었다.)

$$({}_nC_0)^2+({}_nC_1)^2+({}_nC_2)^2+\cdots+({}_nC_n)^2={}_{2n}C_n$$

내신 · 모의고사 대비 TEST

숨마쿰라우데®
[확률과 통계]

정답은 ➞ 본책의 해설지에서
해설은 ➞ 당사 홈페이지에서
확인하실 수 있습니다.
www.erumenb.com

01 여러 가지 순열

Sub Note 105쪽

기본 ☑ Exercises

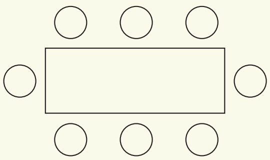
01 A, B를 포함한 6명의 학생이 원탁에 둘러앉아 회의를 하려고 한다. 다음을 구하여라.

(1) 6명의 학생이 원탁에 둘러앉는 경우의 수

(2) A와 B가 이웃하여 앉는 경우의 수

(3) A와 B가 마주 보고 앉는 경우의 수

02 8명의 학생이 그림과 같은 직사각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수를 구하여라.



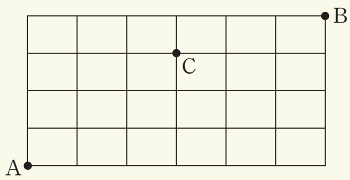
03 서로 다른 5통의 편지를 2개의 우체통에 넣는 경우의 수를 구하여라.

04 1, 2, 3, 4 네 개의 숫자로 중복을 허락하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수 중 반드시 4가 포함되는 것의 개수는?

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

05 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개의 숫자를 일렬로 나열할 때, 숫자 1, 2, 3이 작은 순서대로 놓이는 경우의 수를 구하여라.

06 다음 그림과 같은 도로망이 있다. A지점에서 출발하여 C지점을 지나지 않고 B지점까지 가는 최단 경로의 수를 구하여라.



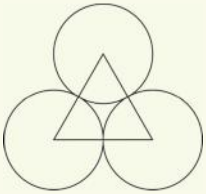
01 여학생 3명과 남학생 6명이 원탁에 같은 간격으로 둘러앉으려고 한다. 각각의 여학생 사이에는 1명 이상의 남학생이 앉고 각각의 여학생 사이에 앉은 남학생의 수는 모두 다르다. 9명의 학생이 모두 앉는 경우의 수가 $n \times 6!$일 때, 자연수 n의 값은?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

02 그림과 같이 서로 접하고 크기가 같은 원 3개와 이 세 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 정삼각형이 있다. 원의 내부 또는 정삼각형의 내부에 만들어지는 7개의 영역에 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 1260 ② 1680 ③ 2520 ④ 3760 ⑤ 5040

03 서로 다른 과일 5개를 3개의 그릇 A, B, C에 남김없이 담으려고 할 때, 그릇 A에는 과일 2개만 담는 경우의 수는?

(단, 과일을 하나도 담지 않은 그릇이 있을 수 있다.)

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

튼튼한 **개념!** 흔들리지 않는 **실력!**

숨마쿰라우데 확률과 통계

‘제대로’ 공부를 해야 공부가 더 쉬워집니다!

“공부하는 사람은 언제나 생각이 명징하고 흐트러짐이 없어야 한다. 그러자면 우선 눈앞에 펼쳐진 어지러운 자료를 하나로 묶어 종합하는 과정이 필요하다. 비슷한 것끼리 갈래로 묶고 교통정리를 하고 나면 정보간의 우열이 드러난다. 그래서 중요한 것을 가려내고 중요하지 않은 것을 추려내는데 이 과정이 바로 ‘종핵(綜核)’이다.” 이는 다산 정약용이 주장한 공부법입니다. 제대로 공부하는 과정은 종핵처럼 복잡한 것을 단순하게 만드는 과정입니다. 공부를 쉽게 하는 방법은 복잡한 내용들 사이의 관계를 잘 이해하여 간단히 정리해 나가는 것입니다. 이를 위해서는 무엇보다도 먼저 내용을 제대로 알아야 합니다. 숨마쿰라우데는 전체를 보는 안목을 기르고, 부분을 명쾌하게 파악할 수 있도록 친절하게 설명하였습니다. 보다 쉽게 공부하는 길에 숨마쿰라우데가 여러분들과 함께 하겠습니다.

학습자 수준에 맞도록 공부하는 단계별 구성!

공부에 매진하는 학생들은 모두가 눈앞에 놓인 목표가 있습니다. 예를 들면, ‘과목의 개념 학습을 확실히 하여 기초를 다지고 싶다’, ‘학교 내신 시험을 잘 보고 싶다’, ‘대학별 논·구술 시험에 대비하고 싶다’ 등등…!! 숨마쿰라우데는 이런 각각의 학생들이 원하는 학습 목표에 따른 선택적 학습이 가능합니다. 첫째, 개념 학습 단계에서는 그 어떤 교재보다도 확실하고 자세하게 개념을 설명하고 있습니다. 둘째, 문제 풀이 단계에서는 개념 확인 문제를 비롯하여 내신형과 수능형 문제, 서술형 문제를 실어 수준별 학습이 가능하도록 하였습니다. 셋째, 심화 학습 단계에서는 교과에 대한 보다 심층적인 내용과 대학별 논·구술 예상 문제를 실어 깊이 있는 사고가 가능하도록 하였습니다. 이러한 숨마쿰라우데의 단계별 구성으로 학생들은 자신의 학습 목표에 맞는 부분을 찾아 공부할 수 있습니다. 모든 학습의 기본은 개념의 확실한 이해입니다. 공부하기 쉬운 숨마쿰라우데로 흔들리지 않는 학습의 중심을 잡으세요.

정가 : 16,000원

ISBN 978-89-5990-486-0

학습 교재의 새로운 신화! 이룸이앤비가 만듭니다!